§ TEORIA HAMILTONIANA DO MODELO DE ISING

A. Caso unidimensional

Consideramos o modelo de Ising numa rede unidimensional. Identificamos a direção da rede como sendo o eixo (euclidiano) do tempo. Tentamos construir a matriz de transferência para este caso com spin $S = \frac{1}{2}$

A ação euclideana neste caso é

$$S = -\beta \sum_i \left[\sigma_z(i)\sigma_z(i+1) + h\,\sigma_z(i)\right], \quad (\sigma_z = \pm 1) \quad (1)$$

onde o índice $\underline{\underline{i}}$ percorre todos os sítios da rede. Usamos condições periódicas de contorno

$$\sigma_z(N+1) \equiv \sigma_z(1),$$

assim o termo que acopla os extremos da cadeia é

$$\beta\, \sigma_z(N)\sigma_z(1).$$

A ação (1) é simetrizada convenientemente escrevendo

$$S = \frac{\beta}{2} \sum_i \left\{\left[\sigma_z(i) - \sigma_z(i+1)\right]^2 - h\left[\sigma_z(i) + \sigma_z(i+1)\right]\right\} + \text{cte},$$

onde temos usado o fato que $\sigma_z^2 = 1$.

Assim a ação pode ser escrita como

$$S = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{L}(i,i+1) + cte \qquad (2)$$

onde $\mathcal{L}(i,i+1)$ é um termo simetrizado nos sítios $(i,i+1)$:

$$\mathcal{L}(i,i+1) = \frac{1}{2}\beta\left\{\left[\sigma_z(i) - \sigma_z(i+1)\right]^2 - h\left[\sigma_z(i) + \sigma_z(i+1)\right]\right\}$$

A função partição $\mathcal{Z}$ pode ser escrita como

$$\mathcal{Z} = \sum_{(\text{Configurações})} exp(-S)$$

$$= \sum_{\sigma_z(1)} \sum_{\sigma_z(2)} \cdots \sum_{\sigma_z(N)} exp\left[-\sum_i \mathcal{L}(i,i+1)\right] \qquad (3)$$

$$= \sum_{\sigma_z(1)} \sum_{\sigma_z(2)} \cdot \sum_{\sigma_z(N)} exp\left(-\frac{\beta}{2}\sum_i\left\{\left[\sigma_z(i) - \sigma_z(i+1)\right]^2 - h\left[\sigma_z(i) + \sigma_z(i+1)\right]\right\}\right)$$

Consideremos agora uma matriz $\hat{T}$ de 2×2, cujos elementos de matriz são definidos como

$$\langle \sigma | \hat{T} | \sigma' \rangle = e^{-\frac{\beta}{2}\left[(\sigma-\sigma')^2 - h(\sigma+\sigma')\right]} \qquad (4)$$

T é pensado como um operador num espaço de spin $S=\frac{1}{2}$. As variáveis σ, σ' tomam os valores ± 1, e devem ser consideradas como os autovalores de um operador de spin $\hat{\sigma}_z$

essencialmente quântico

$$\hat{\sigma}_z |\sigma\rangle = \sigma |\sigma\rangle \quad , \sigma = \pm 1 \tag{5}$$

A função de partição pode ser escrita como

$$\mathcal{Z} = \sum_{\sigma_z(1)} \sum_{\sigma_z(2)} \cdots \sum_{\sigma_z(N)} \prod_{i=1}^{N} \exp\left[-\mathcal{H}(i,i+1)\right]$$

$$= \sum_{\sigma_1=\pm} \sum_{\sigma_2=\pm} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm} \langle\sigma_1|\hat{T}|\sigma_2\rangle\langle\sigma_2|\hat{T}|\sigma_3\rangle \cdots \langle\sigma_N|\hat{T}|\sigma_1\rangle,$$

e usando a completeza da base $\sum_{\sigma=\pm} |\sigma\rangle\langle\sigma| = 1$, obtemos

$$\mathcal{Z} = \sum_{\sigma_1=\pm} \langle\sigma_1|\hat{T}^N|\sigma_1\rangle = Tr(\hat{T}^N), \tag{6}$$

onde temos usado explicitamente a condição periódica de contorno. O cálculo é inmediato uma vez diagonalizada a matriz de transferência. Os elementos de matriz são:

$$\left.\begin{aligned} \langle +|\hat{T}|+\rangle &= e^{h\beta} \\ \langle -|\hat{T}|-\rangle &= e^{-h\beta} \\ \langle +|\hat{T}|-\rangle &= e^{-2\beta} = \langle -|\hat{T}|+\rangle, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

de maneira que $\hat{T}$ pode ser representado pela matriz

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} e^{h\beta} & e^{-2\beta} \\ e^{-2\beta} & e^{-h\beta} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh h\beta + \operatorname{senh} h\beta & e^{-2\beta} \\ e^{-2\beta} & \cosh h\beta - \operatorname{senh} h\beta \end{pmatrix}$$

$$= \cosh h\beta \cdot \hat{I} + \operatorname{senh} h\beta \cdot \hat{\sigma}_z + e^{-2\beta} \cdot \hat{\sigma}_x \,, \qquad (8)$$

onde $\hat{I}$ é a matriz identidade (2×2) e $(\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x)$ são as matrizes de Pauli para spin $S=\frac{1}{2}$.

Imaginamos agora que o eixo da rede é o eixo do tempo da Mecânica Quântica. Ele está convenientemente discretizado, e o operador $\hat{T}$ faz o papel do operador de evolução temporal (liga um determinado tempo com o instante vizinho). Seja $\Delta\tau$ a constante da rede na direção temporal (euclideana). Uma formulação Hamiltoniana existe se no limite $\Delta\tau \to 0$, o operador $\hat{T}$ pode ser escrito na forma

$$\hat{T} = \hat{I} - \Delta\tau \, \hat{H} \,, \qquad (9)$$

Nesse caso teríamos

$$\langle + | \hat{T} | - \rangle = \langle - | \hat{T} | + \rangle = -\Delta\tau \langle + | \hat{\mathcal{H}} | - \rangle$$

$$= -\Delta\tau \langle - | \hat{\mathcal{H}} | + \rangle$$

$$= e^{-2\beta} .$$

Se tivermos $\langle + | \hat{\mathcal{H}} | - \rangle = \langle + | \hat{\sigma}_x | - \rangle = -1$,
podemos identificar

$$\Delta\tau = e^{-2\beta} .$$

$\Delta\tau \to 0$, implica $\beta \to +\infty$.

Elementos diagonais:

$$\langle + | \hat{T} | + \rangle = 1 - \Delta\tau \langle + | \mathcal{H} | + \rangle = e^{\beta h}$$

$e^{\beta h} \simeq 1$, com $\beta h \simeq 0$. Isso é satisfeito com

$$\langle + | \mathcal{H} | + \rangle = -\lambda \langle + | \sigma_z | + \rangle ,$$

onde λ é uma constante não nula. Assim

$$1 + (\Delta\tau)\lambda \cong 1 + \beta h ,$$

Com

$$(\Delta\tau)\lambda = \beta h$$

onde $\beta h \rightarrow 0$, para $\Delta\tau \rightarrow 0$

Resulta:

$$\hat{T} \approx 1 + \Delta\tau\left(\lambda\hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_x\right)$$

$$= 1 - \Delta\tau\,\mathcal{H}$$

logo

$$\mathcal{H} = -\lambda\hat{\sigma}_z - \hat{\sigma}_x$$

Na forma matricial:

$$\mathcal{H} \doteq \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

com eq. secular:

$$(-\lambda - x)(\lambda - x) - 1 = 0 = x^2 - \lambda^2 - 1$$

Soluções:

$$E_{1,2} = \mp\sqrt{\lambda^2 + 1}$$

O estado fundamental, com energia

$$E_1 = -\sqrt{\lambda^2 + 1}$$

se escreve na forma:

$$|G\rangle = A\,|+\rangle + B\,|-\rangle,$$ com

$$A = \frac{\lambda + \sqrt{1+\lambda^2}}{\sqrt{1+(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2})^2}},$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{1+(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2})^2}}.$$

Para a magnetização obtemos:

$$m_z \equiv \langle G|\,\hat{\sigma}_z\,|G\rangle = |A|^2 - |B|^2.$$

Resulta:

$$m_z = \frac{(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2})^2 - 1}{(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2})^2 + 1}.$$

A 'parte' de alta temperatura corresponde a $\lambda = 0$, com

$$m_z(\lambda=0) = 0.$$

Neste caso temos:

$$|G\rangle_{\lambda=0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|-\rangle$$

A 'parte' de temperatura baixa seria $\lambda \to \infty$, com

$$m_z(\infty) \longrightarrow 1,$$

e

$$|G\rangle_{\lambda \to \infty} = |+\rangle.$$

Porém $m_z(\lambda)$ é contínua para todo λ, o sistema não apresentando uma transição de fase em função de λ. A magnetização finita é o resultado da ação do campo externo.

```
* (Eigenvalues and eigenvectors of Hamiltonian) *

In[1]:= m = {{-x, -1}, {-1, x}}

Out[1]= {{-x, -1}, {-1, x}}

In[2]:= Eigensystem[m]

Out[2]= {{-Sqrt[1 + x^2], Sqrt[1 + x^2]}, {{x + Sqrt[1 + x^2], 1}, {x - Sqrt[1 + x^2], 1}}}

In[4]:= Normalize[{x + Sqrt[1 + x^2], 1}]

{(x + Sqrt[1 + x^2])/Sqrt[1 + Abs[x + Sqrt[1 + x^2]]^2], 1/Sqrt[1 + Abs[x + Sqrt[1 + x^2]]^2]}

Normalize[{x - Sqrt[1 + x^2], 1}]

Out[8]= {(x - Sqrt[1 + x^2])/Sqrt[1 + Abs[x - Sqrt[1 + x^2]]^2], 1/Sqrt[1 + Abs[x - Sqrt[1 + x^2]]^2]}

In[9]:= A[x_] = (x - Sqrt[1 + x^2])/Sqrt[1 + Abs[x - Sqrt[1 + x^2]]^2]

Out[9]= (x - Sqrt[1 + x^2])/Sqrt[1 + Abs[x - Sqrt[1 + x^2]]^2]

In[10]:= N[A[1000]]

Out[10]= -0.0005

In[11]:=
N[A[0.]]

Out[11]= -0.707107

In[12]:= B[x_] = 1/Sqrt[1 + Abs[x - Sqrt[1 + x^2]]^2]

Out[12]= 1/Sqrt[1 + Abs[x - Sqrt[1 + x^2]]^2]
```

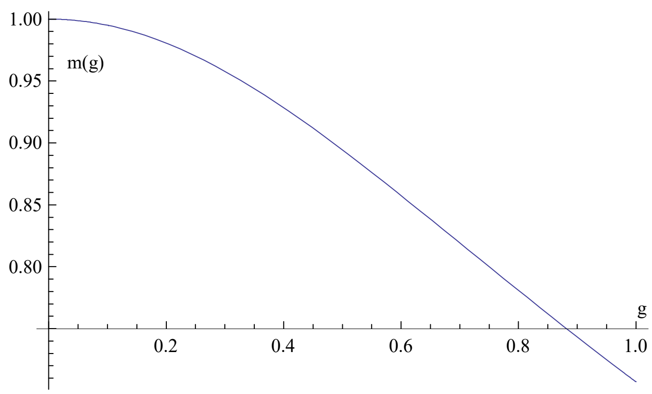
In[16]:= (* Magnetization. Making change of variables g=1/λ *)

```
m[g_] = ((1 + Sqrt[1 + g^2])^2 - g^2) / ((1 + Sqrt[1 + g^2])^2 + g^2)
```

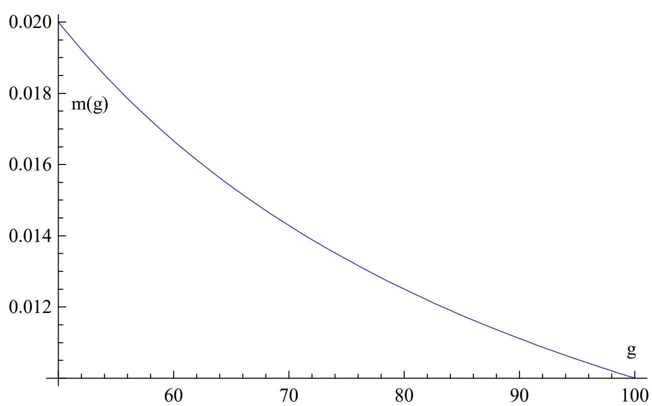
Out[16]=

$$\frac{-g^2+\left(1+\sqrt{1+g^2}\right)^2}{g^2+\left(1+\sqrt{1+g^2}\right)^2}$$

In[27]:= Plot[m[g], {g, 0., 1.0}]



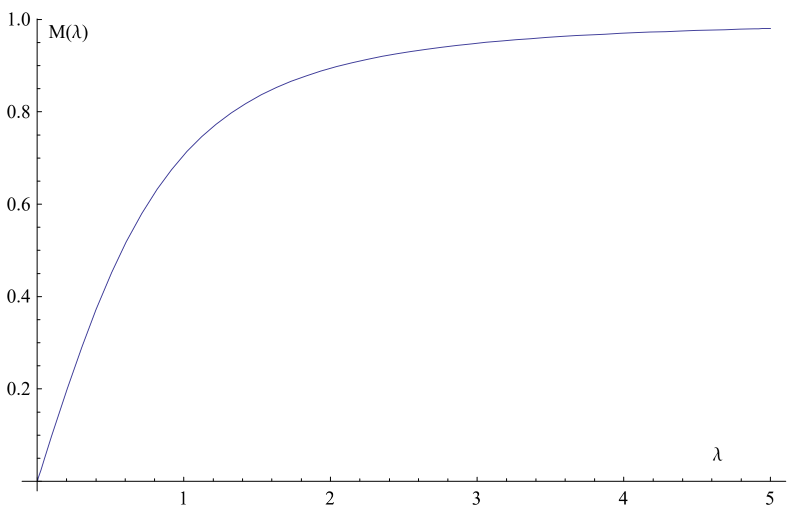
In[28]:= Plot[m[g], {g, 50., 100.0}]



In[29]:=
```
M[λ_] = ((λ + Sqrt[1 + λ^2])^2 - 1) / ((λ + Sqrt[1 + λ^2])^2 + 1)
```

Out[29]=
$$\frac{-1+\left(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}\right)^2}{1+\left(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}\right)^2}$$

In[30]:=
```
Plot[M[λ], {λ, 0., 5.}]
```



In[35]:=
```
(* Eigenvalues *)
E1[x_] = -Sqrt[1 + x^2]
```

Out[35]=
$$-\sqrt{1+x^2}$$

In[36]:= $\sqrt{1 + x^2}$

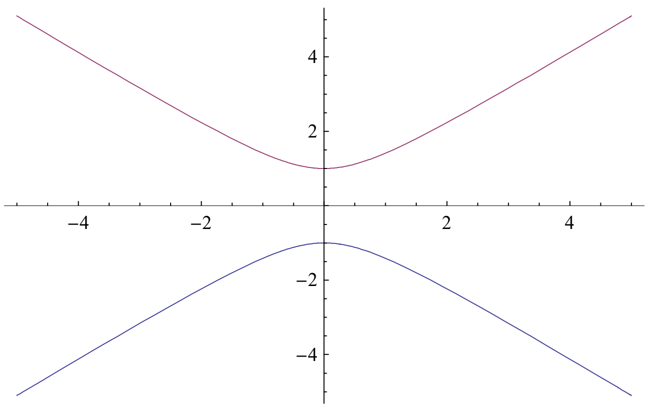
```
E2[x_] = √(1 + x^2)

Plot[{E1[x], E2[x]}, {x, -5., 5.}]
```

Out[36]= $\sqrt{1 + x^2}$

Out[37]= $\sqrt{1 + x^2}$

Out[38]=



Sem campo magnético, $h \equiv 0$, temos:

$$\langle + | \hat{T} | + \rangle = \langle - | \hat{T} | - \rangle = 1 ,$$

$$\langle + | \hat{T} | - \rangle = \langle - | \hat{T} | + \rangle = e^{-2\beta}$$

ou

$$T(\sigma, \sigma') = \begin{pmatrix} 1 & e^{-2\beta} \\ e^{-2\beta} & 1 \end{pmatrix} = 1 + e^{-2\beta} \underbrace{\sigma_x}_{\text{Pauli}}$$

A versão Hamiltoniana é obtida com:

$$\hat{T} = 1 - \Delta\tau \, \hat{\mathcal{H}} ,$$

onde identificamos, $\Delta\tau = e^{-2\beta}$,

$\Delta\tau \to 0$, com $\beta \to +\infty$ e Hamiltoniano

$$\hat{\mathcal{H}} = - \hat{\sigma}_x ,$$

com autovalores $(+1, -1)$. O estado fundamental é:

$$| G \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} | + \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} | - \rangle$$, com os auto-kets de $\hat{\sigma}_z$.

Para o 'parâmetro de ordem' obtemos

$$\langle G | \hat{\sigma}_z | G \rangle = \langle \hat{\sigma}_z \rangle = 0 ,$$

sempre.

B. Duas dimensões

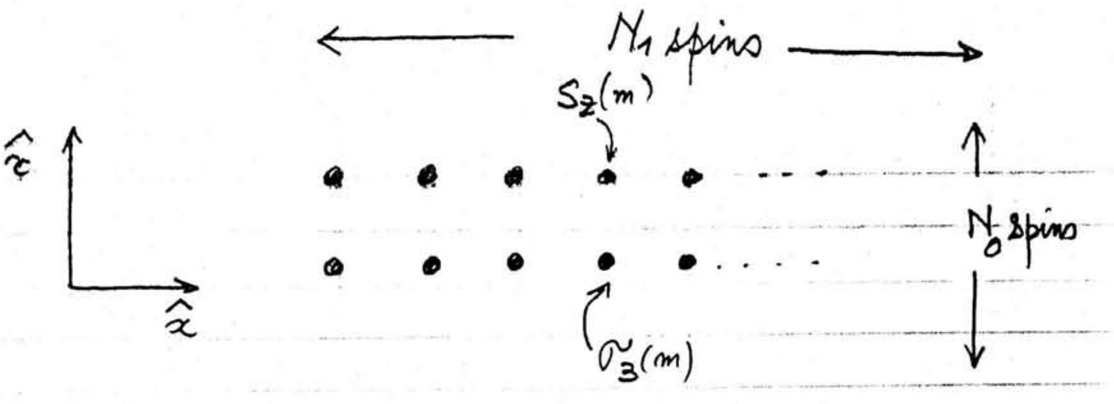
Rede bidimensional premunida de dois vetores unitários $\hat{x}$ e $\hat{\tau}$, na direção espacial e temporal respectivamente. Seja $\underline{n}$ o índice de sítio. A ação euclideana é

$$S = -\sum_{n}\left[\beta_{\tau}\,\sigma_z(n+\hat{\tau})\,\sigma_z(n) + \beta\,\sigma_z(n+\hat{x})\,\sigma_z(n)\right], \qquad (12)$$

onde em geral assumimos constantes de acoplamento (β_τ, β) diferentes. Simetrizamos na direção temporal para construir o Hamiltoniano τ-contínuo deste modelo.

$$S = \frac{1}{2}\beta_\tau \sum_{n}\left[\sigma_z(n+\hat{\tau}) - \sigma_z(n)\right]^2 - \beta\sum_{n}\sigma_z(n+\hat{x})\,\sigma_z(n) \quad , (13)$$

que difere de (13) apenas por uma constante. Consideramos agora duas linhas vizinhas transversais ao eixo do tempo. Chamamos as variáveis $\sigma_z(m)$ numa das linhas, e na outra de $s_z(m)$.



A Ação (12) pode ser escrita como

$$S = \sum_{n_0} L(n_0, n_0+1) \quad , \qquad (14)$$

onde n_0 é um índice que percorre a direção temporal com

$$L = \frac{1}{2}\beta_\tau \sum_m \left[S_z(m) - \sigma_z(m) \right]^2$$
$$- \frac{1}{2}\beta \sum_m \left[\sigma_z(m+1)\sigma_z(m) + S_z(m+1) S_z(m) \right] \quad , \qquad (15)$$

onde $\underline{m}$ percorre os sitios na dirigão espacial para um tempo fixo. Se tivermos N_1 spins ao longo da direção espacial, o número de configurações de uma linha horizontal de spins é 2^{N_1}. A matriz de transferência será então de $2^{N_1} \times 2^{N_1}$. Porém não interessa calcular todos os elementos de matriz de $\hat{T}$. Consideremos primeiro elementos diagonais de $\hat{T}$:

A) Quando temos a mesma configuração nas dois linhas temos $S_z(m) = \sigma_z(m)$, para todo $m = 1, 2, \ldots, N_1$

$$L(0 \text{ flips}) = -\beta \sum_m \sigma_z(m+1)\sigma_z(m) \qquad (16)$$

Elementos não diagonais:

B) Existe um spin flipado entre as duas linhas. Agora

$$L(1\,flip) = 2\beta_\tau - \frac{1}{2}\beta \sum_m \left[\sigma_z(m+1)\sigma_z(m) + S_z(m+1)S_z(m)\right] \quad (17)$$

C) Em geral, temos n spins flipados entre as duas configurações:

$$L(n\,flips) = 2n\beta_\tau - \frac{1}{2}\beta \sum_m \left[\sigma_z(m+1)\sigma_z(m) + S_z(m+1)S_z(m)\right] \quad (18)$$

Agora tentamos uma formulação Hamiltoniana da teoria, escrevendo

$$\hat{T} = e^{-\Delta\tau \hat{\mathcal{H}}} \approx 1 - \Delta\tau\, \hat{\mathcal{H}} \quad (19)$$

para a matriz de transferência. Consideramos os vários elementos de matriz de $\hat{T}$:

A) 0 flips (elemento diagonal)

$$\hat{T}(0\,flips) = \exp\left[\beta \sum_m \sigma_z(m+1)\sigma_z(m)\right] =$$

$$\langle \sigma_1\sigma_2 \dots | \hat{T} | \sigma_1\sigma_2 \dots \rangle = 1 - \Delta\tau\, \hat{\mathcal{H}}\Big|_{0\,flips} \quad (20)$$

B) 1 flip $\qquad S_j = -\sigma_j$ para algum j

$$\hat{T}(1\,flips) = \langle \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_j \dots | \hat{T} | \sigma_1\sigma_2 \dots -\sigma_j \dots \rangle =$$

$$= \underbrace{\langle \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_j \cdots | \sigma_1 \sigma_2 \cdots -\sigma_j \cdots \rangle}_{0} - \Delta\tau \langle \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_j \cdots | \hat{\mathcal{H}} | \sigma_1 \sigma_2 \cdots -\sigma_j \cdots \rangle$$

$$= -\Delta\tau \, \hat{\mathcal{H}} \Big|_{1 \text{ flips}} = e^{-2\beta_\tau} \exp\left\{ \frac{\beta}{2} \sum_m \left[\sigma_z(m+1)\sigma_z(m) + S_z(m+1) S_z(m) \right] \right\} \quad (21)$$

c) n flips ,

$$\hat{T}(n \text{ flips}) = \langle \sigma_1 \sigma_2 \cdots \underbrace{\sigma_j \sigma_k \cdots}_{\leftarrow n \rightarrow} | \hat{T} | \sigma_1 \sigma_2 \cdots -\sigma_j, -\sigma_k \cdots \rangle$$

$$= -\Delta\tau \, \hat{\mathcal{H}} \Big|_{n \text{ flips}} = e^{-2n\beta_\tau} \exp\left\{ \frac{\beta}{2} \sum_m \left[\sigma_z(m+1)\sigma_z(m) + S_z(m+1) S_z(m) \right] \right\} \quad (22)$$

As constantes de acoplamento (β_τ, β) deverão ser ajustadas de maneira de obter a formulação Hamiltoniana no limite $\Delta\tau \to 0$. Da relação (20) obtemos $\beta \sim \Delta\tau$, enquanto que de (21) temos $\Delta\tau \sim e^{-2\beta_\tau}$. Daqui resulta que β e $e^{-2\beta_\tau}$ devem ser proporcionais . Definimos então a constante λ tal que

$$\beta = \lambda \exp(-2\beta_\tau) .$$

Assim identificamos a constante da rede na direção temporal como sendo

$$\Delta\tau = e^{-2\beta_\tau} ,$$

com

$$\beta = \lambda \Delta\tau$$

O limite do tempo contínuo $\Delta\tau \to 0$ é obtido na teoria quando a constante de acoplamento na direção temporal vai a infinito, $\beta_\tau \to \infty$, sendo que simultâneamente o acoplamento na direção espacial fica arbitrariamente fraco, $\beta \to 0$. O processo do limite é tomado de jeito que

$$\beta e^{+2\beta_\tau} \longrightarrow \lambda \text{ (constante finita)}.$$

Encontremos agora o Hamiltoniano quântico deste limite. Com as identificações feitas obtemos

$$\hat{T}(0\,\text{flips}) \underset{\Delta\tau\to 0}{\approx} 1 + \Delta\tau \left[\lambda \sum_m \sigma_z(m+1)\sigma_z(m)\right]$$

$$\approx 1 - \Delta\tau\, \hat{\mathcal{H}}\Big|_{0\,\text{flips}}$$

$$\hat{T}(1\,\text{flips}) \approx \Delta\tau \approx -\Delta\tau\, \hat{\mathcal{H}}\Big|_{1\,\text{flips}}$$

$$\hat{T}(n\,\text{flips}) \approx (\Delta\tau)^n \approx -\Delta\tau\, \hat{\mathcal{H}}\Big|_{n\,\text{flips}}$$

Assim, no limite $\Delta\tau \to 0$, os únicos termos que sobrevivem são os elementos de matriz diagonais

$$\langle \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_j \ldots | \hat{\mathcal{H}} | \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_j \ldots \rangle =$$

$$= -\lambda \sum_m \sigma_z(m+1)\, \sigma_z(m) \,, \qquad (23)$$

e os elementos de matriz com 1-spinflip

$$\langle \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_j \ldots | \hat{\mathcal{H}} | \sigma_1 \sigma_2 \ldots -\sigma_j \ldots \rangle = -1 \,. \qquad (24)$$

Introduzindo os operadores quânticos de spin 1/2 e as correspondentes matrizes de Pauli, podemos escrever o Hamiltoniano que fornece os elementos de matriz dados acima em (23) e (24):

$$(25) \quad \boxed{\mathcal{H} = -\lambda \sum_m \hat{\sigma}_z(m+1)\hat{\sigma}_z(m) - \sum_m \hat{\sigma}_x(m),}$$

porque

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_z(m) | \sigma_m \rangle = \sigma_m | \sigma_m \rangle \,, \\ \hat{\sigma}_x(m) | \sigma_m \rangle = +\sigma_m | -\sigma_m \rangle \,. \end{cases}$$

O parâmetro λ (mais propriamente λ^{-1}) é chamado CAMPO TRANSVERSO

(25) é chamado 1-dim Ising com campo transverso.

Cód. 1726

Tentemos entender melhor as relações de escala no processo do tempo contínuo:

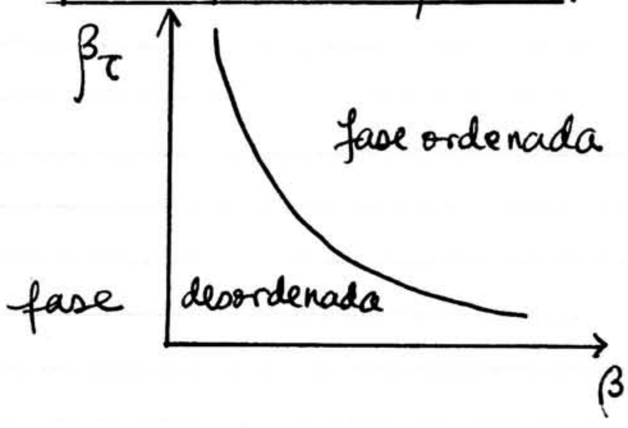
$$\Delta\tau = e^{-2\beta_\tau} \,, \quad \beta = \lambda\, e^{-2\beta_\tau}$$

$$\beta = \lambda\, \Delta\tau$$

A Ação do modelo de Ising bidimensional está parametrizada pela constantes de acoplamento (β, β_τ). Este modelo tem uma transição de fase (ordem ferromagnética, por exemplo) entre uma fase ordenada (temperatura baixa) e uma fase desordenada (temperatura alta).

No espaço (β_τ, β) temos uma curva crítica que separa ambas fases no plano. Ela é dada por:

$$\boxed{\operatorname{senh} 2\beta_\tau \operatorname{senh} 2\beta = 1} \qquad \text{(Onsager)}$$



Para (β_τ, β) na curva crítica, temos uma Teoria com comprimento de correlação infinito. Consideremos a forma da curva no limite $\beta_\tau \to \infty$, $\beta \to 0$

$$\operatorname{senh} 2\beta_\tau \to \frac{1}{2}\, e^{2\beta_\tau}$$

$$\operatorname{senh} 2\beta \to 2\beta$$

Para manter a criticalidade, devemos ter:

$$\operatorname{senh} 2\beta_\tau \operatorname{senh} 2\beta = 1 \quad \approx \frac{1}{2} e^{2\beta_\tau} \cdot 2\beta = 1$$

ou

$$\boxed{\beta = e^{-2\beta_\tau},}$$

que é a mesma relação de escala que encontramos no limite anisotrópico, mas com $\underline{\lambda = 1}$ (ponto crítico).

Isso mostra que a versão τ-contínua tem as mesmas 'propriedade críticas' do modelo geral e pode ser vista como um caso limite natural da teoria. O parâmetro λ pode agora ser usado para rotular as fases:

$\lambda < 1$	$\lambda = 1$	$\lambda > 1$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
fase desordenada	valor crítico	fase ordenada

A mesma situação se reflete, estudando a função de correlação

$$\Gamma(n) = \langle \sigma_z(n) \sigma_z(0) \rangle$$

para $\underline{n}$ grande. No caso isotrópico, $\beta_\tau = \beta$, $n \gg 1$, $\Gamma(n)$ tem simetria de rotação: $\Gamma(n) = \Gamma(|n|)$.

Para $\beta_\tau > \beta$, as curvas $\Gamma(n) = \text{cte.}$, se transformam em elipses, com o semi-eixo maior na direção temporal (porque a correlação é agora mais forte ao longo de $\hat{\tau}$).

Para restaurar a mesma física, devemos deformar a rede na direção temporal. No limite $\beta_\tau \to \infty$, a constante da rede tem que ser contraída para zero:

$$\beta_\tau \to \infty, \quad \Delta\tau \to 0$$

A relação de escala que preserva a física nas diversas formulações de rede é exatamente

$$\Delta\tau = e^{-2\beta_\tau}.$$